

Лекція № 3

1.7. Чотиривимірні вектори

Згадаємо, що перетворення Лоренца зберігають інтервал між подіями

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Вже ввели поняття 4-вектора, координати якого (див. ф-лу (1.34) з лекції № 2) визначили так:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict;$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Отримали (див. ф-лу (1.35) з лекції № 2) квадрат довжини 4-вектора, який не змінюється при поворотах чотиривимірної системи координат

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -S^2,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=1}^4 x_i'^2. \quad (1.37)$$

Напишемо же раз перетворення Лоренца в 4-координатах для координат (x_1, x_4) (див. ф-лу (1.36) з лекції № 2)

$$x_1 = x'_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - x'_4 \frac{i\left(\frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_4 = x'_1 \frac{i\left(\frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + x'_4 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.38)$$

та знайдемо, на який саме кут в площині $(x_1 = x, x_4 = ict)$ відбувається поворот. Перетворення повороту це

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_4 \sin \varphi; \\ x_4 = x'_1 \sin \varphi + x'_4 \cos \varphi; \end{cases} \quad (1.39)$$

Маємо з (1.38) та (1.39)

$$\sin \varphi = \frac{i\left(\frac{V}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \tan \varphi = i\left(\frac{V}{c}\right); \quad (1.40)$$

$$\sin \varphi = i\beta\gamma; \quad \cos \varphi = \gamma; \quad \tan \varphi = i\beta.$$

Перетворення Лоренца – **поворот на уявний кут!**

Згадаємо зв'язок між тригонометричними та гіперболічними синусом, косинусом

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}); \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \varphi = i\psi; \\ \sin(i\psi) &= \frac{1}{2i}(e^{-\psi} - e^{\psi}) = -\frac{1}{2i}(e^{\psi} - e^{-\psi}) = -\frac{1}{i}\operatorname{sh}(\psi) = i\operatorname{sh}(\psi); \\ \cos(i\psi) &= \frac{1}{2}(e^{-\psi} + e^{\psi}) = \operatorname{ch}(\psi).\end{aligned}$$

В гіперболічних позначеннях

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \operatorname{ch} \psi - ix'_4 \operatorname{sh} \psi; \\ x_4 = ix'_1 \operatorname{sh} \psi + x'_4 \operatorname{ch} \psi; \end{cases} \quad \operatorname{th} \psi = \frac{V}{c} = \beta. \quad (1.41)$$

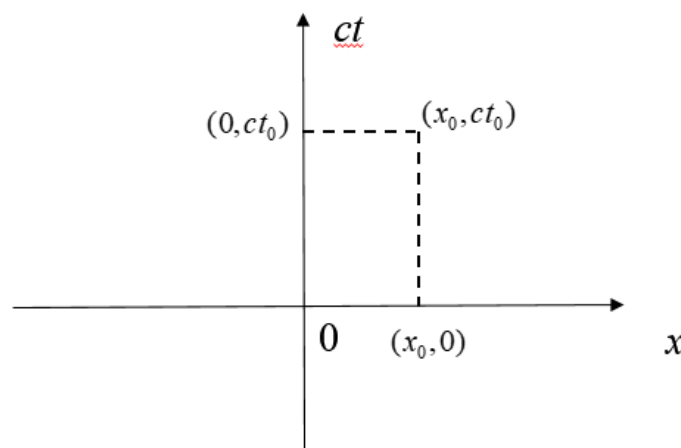
Перетворення Лоренца для координат та часу тепер виглядають так

$$\begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi; \\ ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi; \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c} = \beta; \quad \operatorname{sh} \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

Легко перевірити, що $\operatorname{ch}^2 \psi - \operatorname{sh}^2 \psi = 1$.

Нехай початки координат двох систем координат співпадають. Як виглядатимуть осі x', ct' в системі координат x, ct ?



Скористаємось формулами (1.42). Рівняння осі x' отримаємо, поклавши в (1.42) $t' = 0$:

$$\begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \psi; & \frac{ct}{x} = \frac{\operatorname{sh} \psi}{\operatorname{ch} \psi} = \operatorname{th} \psi; & ct = (\operatorname{th} \psi) x \\ ct = x' \operatorname{sh} \psi; & & \end{cases}$$

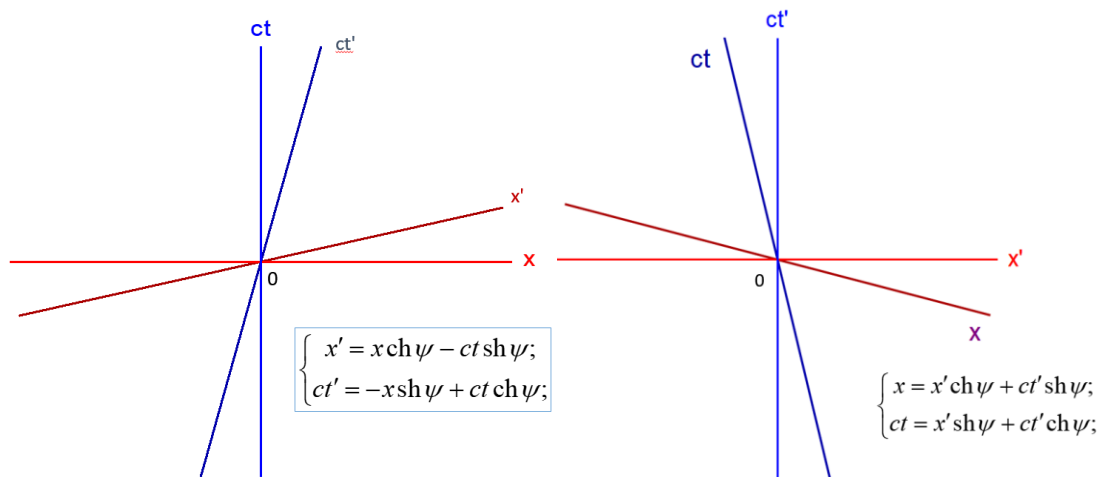
$$ct = \frac{V}{c} x;$$

Рівняння осі t' отримаємо, поклавши в (1.42) $x' = 0$:

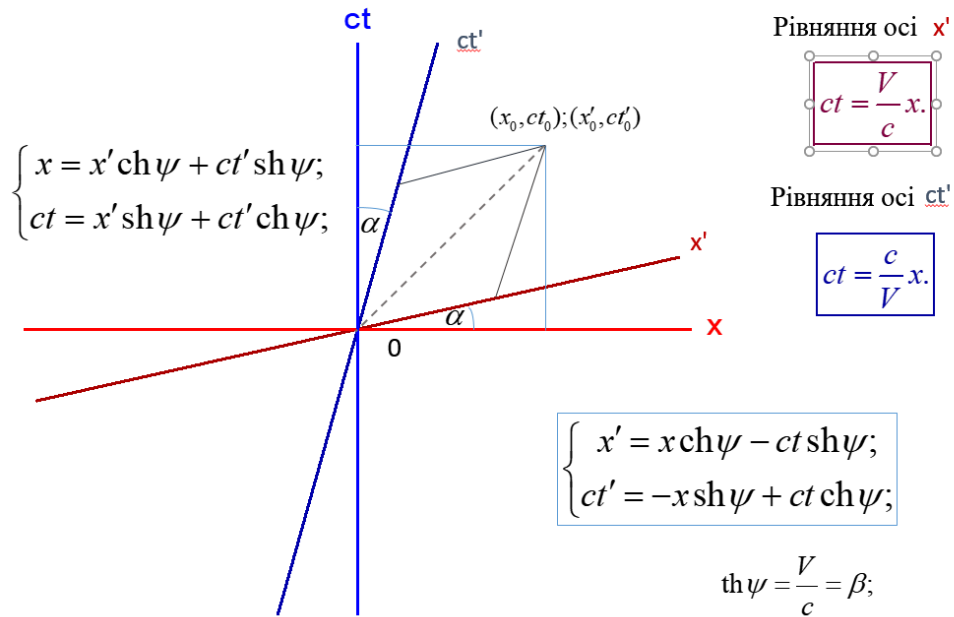
$$\begin{cases} x = ct' \operatorname{sh} \psi; & \frac{ct}{x} = \operatorname{cth} \psi; & ct = (\operatorname{cth} \psi) x; \\ ct = ct' \operatorname{ch} \psi; & & \end{cases}$$

$$ct = \frac{c}{V} x.$$

Система координат x', ct' стає внаслідок перетворень Лоренца (повороту на уявний кут) косокутною! Перетворення Лоренца не тільки повертають осі координат, але й змінюють масштаби координат по осях в координатах x, ct . Перетворення Лоренца – це поворот у псевдоевклідовому просторі.



Наслідки з перетворень Лоренца тепер мають геометричне пояснення. На наступному рисунку показано, як спростувати на осі косокутової системи координат координати точки



Ще одне графічне пояснення з підручника

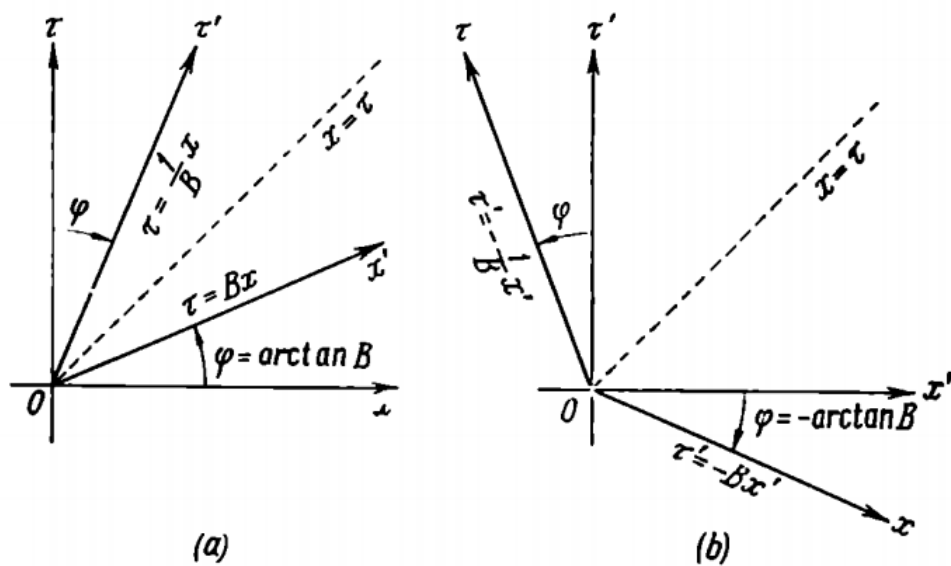
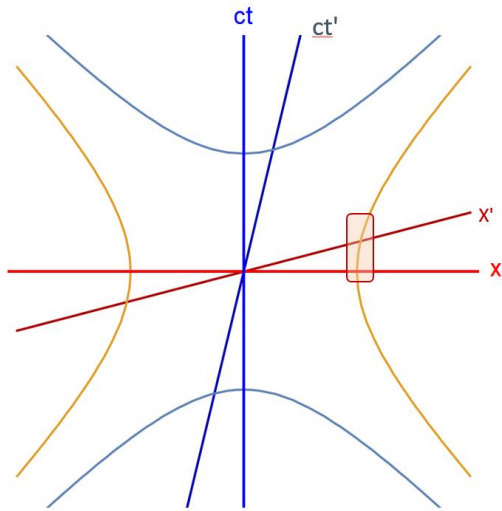


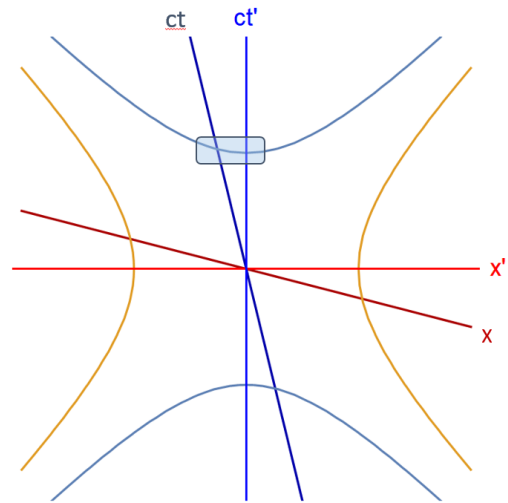
Fig. 2.6. A geometric illustration of the Lorentz transformation. The Lorentz transformation reduces to the rotation of the x and τ axes through the angle $\varphi = \arctan B$ around the origin in the direction of the coordinate angle bisector to their final positions x' , τ' . The straight lines $x' = \text{const}$ are now parallel to the $O\tau'$ axis and the straight lines $\tau' = \text{const}$ are parallel to the Ox' axis (we have passed over to the rectilinear oblique-angled system of coordinates). The transition from the frame K to K' corresponds to the convergence of the τ' and x' axes (a); the inverse transition to the divergence of the τ and x axes (b).

Гіперболами на двох наступних рисунках позначені інтервали між двома подіями.



$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2};$$

(a)



$$\tau = t \sqrt{1 - \beta^2};$$

(б)

З рисунків видно, що масштаби «власних» довжин (а) та часу (б) різні в різних системах відліку!

Суттєвою різницею між звичним евклідовим простором та псевдоевклідовим простором є те, що в евклідовому просторі якщо довжина вектору (відстань r_{12}) дорівнює нулю $r_{12} = 0$, точки простору 1 та 2 співпадають, а у псевдоевклідовому просторі інтервал l_{12} (довжина 4-вектора) може дорівнювати нулю й для двох різних точок 4-простору.

Існує інше визначення вектору в 4-просторі, яке використовується в загальній теорії відносності – теорії гравітації. Таке визначення використовується в нових виданнях Landau–Lifshitz.

Для того, щоб визначити квадрат 4-радіус-вектора, як релятивістський інваріант у псевдоевклідовому просторі вводять два типи компонент одного й того ж вектору: «контрваріантні» – з індексами зверху, та «коваріантні» – з індексами знизу.

Нехай контрваріантні компоненти радіус-вектору

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \quad (1.43)$$

Коваріантні компоненти радіус-вектору

$$x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z. \quad (1.44)$$

Таким чином

$$x_0 = x^0, x_1 = -x^1, x_2 = -x^2, x_3 = -x^3. \quad (1.45)$$

Компонента x^0 називається часовою компонентою, а x^1, x^2, x^3 – координатними компонентами. Власне вектор x^1, x^2, x^3 – це просто радіус-вектор $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Скорочено 4-вектор запишеться так:

$$x^i = (ct, \vec{r}) \quad (1.46)$$

Перетворення Лоренца для контрваріантних компонент

$$x^0 = \frac{x^{0'} + \frac{V}{c} x^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{\frac{V}{c} x^{0'} + x^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x^{2'}; \quad x^3 = x^{3'}. \quad (1.47)$$

Для коваріантних компонент

$$x_0 = \frac{x'_0 - \frac{V}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_1 = \frac{-\frac{V}{c} x'_0 + x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \quad (1.48)$$

Квадрат довжини радіус-вектору зручно записати за допомогою контр- та коваріантних компонент

$$\sum_{i=0}^3 x^i x_i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \quad (1.49)$$

Індекси, по яких відбувається додавання, інколи ще називають «німі». Індекси, які зустрічаються тільки один раз інколи ще називають «говорячі». Очевидно, що для однакових компонент квадрат довжини 4-радіус вектору

$$\sum_{i=0}^3 x^i x_i = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2$$

Квадрат довжини 4-радіус-вектора не змінюється при будь-яких поворотах чотиривимірної системи координат. Перетворення Лоренца є також одним з випадків повороту – це поворот в площині (x^0, x^1) .

Домовимося надалі, що у виразах типу (1.49) можна опускати знак суми та вважати, що по індексах, які повторюються двічі, відбувається додавання по всіх можливих значеннях цих індексів ($i = 0, 1, 2, 3$), тобто

$$x^i x_i \equiv \sum_{i=0}^3 x^i x_i. \quad (1.50)$$

Фізичні величини, які ми вивчаємо, є функціями координат та часу, тобто залежать від координат 4-радіус-вектору $x^i, i = 0, 1, 2$

4-вектором A^i називається сукупність чотирьох величин A^0, A^1, A^2, A^3 , які при перетвореннях чотиривимірної системи координат перетворюються, як компоненти 4-радіус-вектора x^i . При перетвореннях Лоренца для контрваріантних компонент 4-вектора A^i маємо

$$A^0 = \frac{A^{0'} + \frac{V}{c} A^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{\frac{V}{c} A^{0'} + A^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad A^2 = A^{2'}; \quad A^3 = A^{3'}. \quad (1.51)$$

Коваріантні компоненти A_i :

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (1.52)$$

Правило таке: підняття або опускання часового індексу (0) не змінює знак компоненти, а підняття або опускання просторового індексу (1,2,3) змінює знак компоненти.

Перетворення Лоренца для коваріантних компонент вектору

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{-\frac{V}{c} A'_0 + A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad A_2 = A'_2; \quad A_3 = A'_3. \quad (1.53)$$

Квадрат довжини 4-вектора

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i \equiv A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = \text{inv} \quad (1.54)$$

По індексах, які двічі повторюються, домовились вже виконувати додавання, а знак суми не писати. Це значно спрощує запис формул.

Вводимо поняття скалярного добутку двох векторів

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad (1.55)$$

Очевидно, що при зміні порядку контраваріантних та коваріантних компонент в формулах (1.49), (1.54), (1.55) результат не залежить $A^i B_i = A_i B^i$.

Компоненту A^0 називають часовою, компоненти A^1, A^2, A^3 – просторовими компонентами. Квадрат довжини 4-вектора може бути, додатним, від’ємним або нульовим. Відповідні 4-вектор називають часоподібними, просторовоподібними або нульовими (світлоподібними) відповідно за аналогією з інтервалами.

Просторові компоненти 4-вектора складають тривимірний вектор $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, тому можна записати 4-вектор та квадрат довжини так

$$\begin{aligned} A^i &= (A^0, \vec{A}); \quad A_i = (A_0, -\vec{A}); \\ A^i A_i &= (A^0)^2 - \vec{A}^2. \end{aligned} \quad (1.56)$$

4-радіус вектор

$$x^i = (ct, \vec{r}); \quad x_i = (ct, -\vec{r}); \quad x^i x_i = c^2 t^2 - \vec{r}^2. \quad (1.57)$$

Для просторових компонент немає потреби в контр- та коваріантних компонентах, тому так де це не призведе до непорозумінь, будемо писати компоненти з індексами знизу. Просторові індекси позначатимемо грецькими літерами: A_α , $\alpha = 1, 2, 3$. Скалярний добуток двох просторових векторів

$$\vec{A} \vec{B} = A_\alpha B_\alpha = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3. \quad (1.58)$$

Побудуємо всі можливі добутки всіх компонент двох просторових векторів $A_\alpha B_\beta$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Це тривимірний тензор 2-го рангу. Він складається з $3 \times 3 = 9$ компонент. При поворотах координат, очевидно, перетворюється так само, як добуток двох векторів $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$; $B^k = (B^0, B^1, B^2, B^3)$;

$$\begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0 B^1 & A^0 B^2 & A^0 B^3 \\ A^1 B^0 & A^1 B^1 & A^1 B^2 & A^1 B^3 \\ A^2 B^0 & A^2 B^1 & A^2 B^2 & A^2 B^3 \\ A^3 B^0 & A^3 B^1 & A^3 B^2 & A^3 B^3 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Побудуємо всі можливі добутки всіх компонент двох 4-векторів $A^i B^k$ $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$; $B^k = (B^0, B^1, B^2, B^3)$.

$$\begin{pmatrix} A^0 B^0 & A^0 B^1 & A^0 B^2 & A^0 B^3 \\ A^1 B^0 & A^1 B^1 & A^1 B^2 & A^1 B^3 \\ A^2 B^0 & A^2 B^1 & A^2 B^2 & A^2 B^3 \\ A^3 B^0 & A^3 B^1 & A^3 B^2 & A^3 B^3 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Очевидно, що це 4-тензор 2-го рангу Записаний в контрваріантних компонентах.

Чотиривимірний тензор 2-го рангу – це сукупність $4^2=16$ величин, які при поворотах координат перетворюються, як добутки компонент двох векторів. Такий тензор має два індекси, які можна написати або зверху, або знизу, тому компоненти 4-тензору 2-рангу можна представити в трьох виглядах: A^{ik} – контраваріантні, A_{ik} – коваріантні, A^i_k та A_k^i – змішані. Згадаємо, що підняття або опускання часового індексу (0) не змінює знак компоненти, а підняття або опускання просторового індексу (1,2,3) змінює знак компоненти та напишемо такі співвідношення для компонент тензору 2-го рангу

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}; & A_{01} &= -A^{01}; & A_{11} &= A^{11}; & \dots \\ A^0_0 &= A^{00}; & A^0_1 &= A^{01}; & A^0_1 &= -A^{01}; & A^1_1 &= -A^{11}; \dots \end{aligned}$$

Дев'ять просторових компонент $A^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ складають тривимірний тензор 2-го рангу відносно суто просторових перетворень. Три компоненти A^{01}, A^{02}, A^{03} та три компоненти A^{10}, A^{20}, A^{30} є тривимірними векторами, а часова компонента A^{00} є тривимірним скаляром.

Чотиривимірний тензор рангу r – це сукупність 4^r , які при поворотах координат перетворюються, як добутки компонент r векторів. Ранг тензору визначається кількістю індексів. Тензор нульового рангу (без індексів) є скаляром, тензор 1-го рангу є вектором.